

به نام خدای مهربان
باشگاه دانش پژوهان جوان
امتحان جامع دوم
۱۹ مرداد ماه ۱۳۸۷
مدت امتحان: ۳ ساعت

(۱) در سال ۱۷۲۷ جیمز برادلی با توجه به محدودیت سرعت نور و تاثیر سرعت مداری زمین بر موقعیت ظاهری ستاره‌ها، موفق به توضیح پدیده‌ی ابیراهی شد. ثابت کنید به واسطه‌ی این اثر، موقعیت ظاهری یک ستاره‌ی دور با عرض سماوی β از دید ناظر زمینی در طول یک سال بر روی بیضی حرکت می‌کند. برای ستاره‌هایی با $\beta = 0^\circ$ ، $\beta = 45^\circ$ و $\beta = 90^\circ$ ، مسیر حرکت را با مشخص کردن مقیاس رسم کنید.

(۲) سیاره‌ای به فاصله‌ی r از ستاره‌ای با درخشندگی L قرار دارد. فرض کنید سطح خارجی جو این سیاره، $\alpha\%$ از نوری را که از خارج جو به آن می‌تابد و $c\%$ از نوری را که از داخل جو به آن می‌تابد بازتاب می‌کند. همچنین سطح سیاره $b\%$ از شار انرژی را که به آن می‌تابد، باز می‌تاباند و بقیه را جذب می‌کند. دمای سطح سیاره را در حالت تعادل ترمودینامیکی، محاسبه کنید. فرض کنید جو سیاره انرژی جذب نمی‌کند و سرعت وضعی سیاره آن قدر زیاد است که سطح سیاره، تقریباً هم‌دم است.

(۳) سه ستاره‌ی A ، B و C را در نظر بگیرید که برای ناظری در عرض جغرافیایی ϕ ، هم‌زمان در حال عبور مشاهده می‌شوند و در هنگام عبور این ستاره‌ها، ستاره‌ی A در سرسوق قرار دارد. زاویه‌ی ψ را زاویه‌ای تعریف می‌کنیم که مسیر غروب یک ستاره در لحظه‌ی غروب آن ستاره با افق می‌سازد. مقدار ψ برای هر یک از ستاره‌های A ، B و C برابر است با

$$\psi_A = 0, \quad \psi_B = \frac{90 - \phi}{3}, \quad \psi_C = 90 - \phi$$

الف) با استدلال کافی، مقدار عرض جغرافیایی ناظر را مشخص کنید.

ب) سمت غروب ستاره‌ی C و میل این ستاره چه قدر است؟

پ) در زمانی که ستاره‌ی B به افق ناظر می‌رسد، سمت و ارتفاع ستاره‌ی A را به دست آورید.

ت) چه مدت پس از غروب ستاره‌ی B ، ستاره‌ی A به افق ناظر می‌رسد؟

ث) اگر فرض کنیم ستاره‌های آسمان به‌طور یک‌نواخت بر کره‌ی سماوی توزیع شده باشند، چند درصد از این ستاره‌ها دارای میل بیش از میل ستاره‌ی B و کم‌تر از میل ستاره‌ی A هستند؟

(۴) اگر خورشید به وسیله‌ی غباری کروی با چگالی ثابت ρ در بر گرفته شود، علاوه بر نیروی گرانش خورشید، نیروی مرکزی و جاذب $F^r = -mqr$ به سیاره‌ای به جرم m وارد می‌شود، که در آن

$$q = \frac{4\pi}{3} \rho G$$

الف) نشان دهید سیاره، مدار دایره‌ای پایدار دارد.

ب) مقدار زاویه‌ی اوج و حضیض مدار سیاره چه قدر است؟

راهنمایی:

– زاویه‌ی بین هر اوج و حضیض متوالی را زاویه‌ی اوج و حضیض می‌گویند.

– نتیجه‌ی محاسبه‌ها را می‌توانید بر حسب شعاع مدار دایره‌ای بنویسید.

(۵) طبق قانون هابل ($v_{rec} = H_0 D$)، کهکشان‌ها با سرعت متناسب با فاصله از ما دور می‌شوند. در این معادله، H_0 ثابت هابل، D فاصله از ناظر و v_{rec} سرعت دور شدن کهکشان از ناظر است. کهکشانی را در نظر بگیرید که در فاصله‌ی $D = ۱۰ \text{ Mpc}$ از ما قرار دارد و با انبساط عالم با سرعتی مدام بزرگتر از ما دور می‌شود. سفینه‌ای را با سرعت ثابت به سمت این کهکشان می‌فرستیم که پس از پنج میلیارد سال به آن برسد. سرعت سفینه را حساب کنید.

$$\frac{d}{dt} a \exp(bx) = ab \exp(bx)$$